كيف تبنى "روبوت" حقيقى؟

١٦- طرق التحكم فى الأذرع الروبوتية

د. عـــلاء خميـس
كلية هندسة البترول - جامعة قناة السويس

تقع على عاتق منظومة التحكم فى الذراع الروبوتى مهمة التحكم فى حركة الوصلات الميكانيكية للمناول لجعله يتبع بصورة تكرارية مسار حركة محدد له مسبقًا لتنفيذ المهمة المكلف بها.. مثل تناول الاغراض أو الطلاء أو عمليات التجميع أو اللحام.. إلخ. وعلى الرغم من الطبيعة الاستاتيكية لبيئة عمل الأذرع الروبوتية مقارنة ببيئة العمل المتغيرة للروبوتات الجوالة.. فإن هناك العديد من المشاكل التى لا يمكن تجنبها أو تخمينها بصورة كاملة.. مثل الأخطاء الناتجة عن عدم دقة النموذج الكينماتيكى للذراع.. أو مشاكل الاحتكاك فى مفاصل الذراع أو الانصياع الميكانيكى فى الوصلات.. أو مشاكل الضوضاء فى الدوائر الكهربية للذراع.. أو المشاكل الناتجة عن عدم الدقة الكاملة فى الحسابات الرياضية والتى عادة ما يتم التضحية بها لضمان الحصول على نتائج مقبولة فى زمن التشغيل الحقيقى.

ولتمكين الروبوت من أداء مهمة معينة.. فعادة ما يتم تجزئة هذه المهمة إلى تتابع من الحركات الروبوتية فى منظومة الاحداثيات الكارتيزية والتى يتم تمثيلها بثلاث محاور حركة انتقالية (x,y,z) وثلاث محاور حركة دورانية (α,β,γ).. تسمح بتمثيل اى نقطة فى جسم الذراع الروبوتى. وعادة ما يتم التركيز على نقطة تسمى نقطة مركز الأداة Tool Center Point (TCP). وكما هو مبين بالشكل رقم (١).. تمثل هذه النقطة مركز الأداة المثبته فى النهاية الطرفية للذراع والتى تساعده على أداء المهمة المبرمج عليها..

(١)

مثل ماسك لتناول الاغراض أو أداة قطع أو رشاش دهان أو مشعل لحام.. إلخ. وللتحكم فى موضع الأداة.. يجب التحكم فى موضع كل مفصل من مفاصل الذراع الروبوتى.. ويجب ايضًا معرفة العلاقة بين موضع الأداة وموضع المفصل.. وهو ما يمكن الحصول عليه باستخدام علم «الكينماتيكا» Kinematics.. الذي يختص بدراسة حركة الأجسام دون النظر إلى مسبباتها.. أى بوصف حركة الروبوت من حيث الوضع والسرعة والعجلة بالنسبة لمنظومة إحداثيات مرجعية (عادة ما تكون القاعدة الثابتة للذراع).. دون الأخذ فى الاعتبار دراسة القوى والعزوم المسببة لهذه الحركة (وهو اختصاص علم «الديناميكا» Dymanics.

ينقسم علم «كينماتيكا الروبوت» إلى ثلاثة أقسام هي.. الكينماتيكا الامامية Forward Kinematic – والكينماتيكا العكسية Inverse Kinematics – والكينماتيكا التفاضلية Differential Kinematics. يختص القسمان الأول والثانى بدراسة الموضع.. فى حين يمكن الحصول على السرعة والعجلة باستخدام القسم الثالث. يوضح الشكل رقم (٢) الروبوت IRB2400 الذى تنتجه شركة ABB والذى يتمتع بست درجات حرية حركة (DOF).. حيث يمكن استخدام الكينماتيكا الامامية للحصول على إحداثيات نقطة النهاية الطرفية (TCP) بدلالة المواضع الزاوية لمفاصل الذراع وبمعلومية أطوال الوصلات الميكانيكية للذراع.. فى حين تستخدم الكينماتيكا العكسية للحصول على المواضع الزاوية لمفاصل الروبوت بدلالة إحداثيات النقطة (TCP)وبمعلومية أطوال الوصلات الميكانيكية للذراع.

(٢)

الكينماتيكا الأمامية
Forward Kinematics

يختص علم «الكينماتيكا الامامية» بالحصول على إحداثيات نقطة النهاية الطرفية (TCP) بالنسبة لمنظومة إسناد مرجعية وذلك بدلالة المواضع الزاوية لمفاصل الذراع وبمعلومية أطوال الوصلات الميكانيكية للذراع. يمكن الحصول على هذه العلاقة باستخدام الهندسة الفراغية أو عن طريق جبر المصفوفات. تصلح الطريقة الأولى فى حالة الأذرع الروبوتية البسيطة والتى لا تتمتع بدرجات حرية حركة كبيرة (يجب مراعاة عدم وصف الذراع بالروبوتى إذا كان عدد درجات حرية الحركة أقل من ثلاثة). وفى العادة.. يتم الاعتماد على جبر المصفوفات لحل مشكلة الكينماتيما الأمامية فى الروبوتات الصناعية. تعتمد هذه الطريقة على فكرة نقل أو تدوير محاور الإسناد وإيجاد العلاقة بين منظومات إسناد مختلفة موزعة على مفاصل الذراع باستخدام مصفوفة التحويل المتجانس Homogenous Transformation Matrix. تستخدم هذه المصفوفة فى تمثيل اى جسم فى الفراغ وهى مصفوفة 4x4 تأخذ الشكل المبين فى المعادلة رقم (١)- شكل رقم (٣).

تحتوى مصفوفة التحويل المتجانس على.. مصفوفة 3x3 تسمى مصفوفة الدوران.. ومتجه 1x3 يسمى متجه الانتقال أو الإزاحة ومتجه 3x1 يمثل متجه التشوه أو تغير الشكل فى اتجاه محاور الإسناد الثلاثة.. وقيمة عددية تمثل تغير المقياس. وعلى اعتبار أن جسم الروبوت صلب غير قابل لتغير شكله أو مقياسه.. يتم إعطاء عناصر متجة تغير الشكل قيمة صفرية فى حين تكون قيمة المقياس دائمًا واحد. يوضح الشكل رقم (٤).. ذراع روبوتى بثلاث درجات حرية حركة دورانية.. يتم وضع منظومة إسناد فى النهاية الطرفية

(٣)

(٤)

(٥)

للذراع وفى كل مفصل من مفاصل الروبوت. وباستخدام مصفوفة التحويل المتجانس.. يمكن بسهولة إيجاد العلاقة بين منظومة الإسناد المثبتة فى النهاية الطرفية للذراع وقاعدة الروبوت كمنظومة إسناد مرجعية معلومة باستخدام المعادلة رقم (٢) – شكل رقم (٣) – حيث:

– $T_X(l_3)$ تمثل الازاحة مسافة l_3 فى اتجاه محور X.. لنقل منظومة الاسناد الرابع إلى المفصل الثالث.

– $R_Z(q_3)$: مصفوفة الدوران زاوية مقدارها q_3 حول محور Z (الاتجاه العمودى على الصفحة) حتى تتوازى منظومة الإسناد الرابعة (المنقولة) مع منظومة الإسناد الثانى.

– $T_X(L_2)$: الإزاحة مسافة l_2 فى اتجاه محور X وذلك لنقل منظومة الإسناد الرابعة إلى المفصل الثانى.

– $R_Z(q_2)$: مصفوفة الدوران زاوية مقدارها q_2 حول محور Z حتى يتوازى منظومة الإسناد الرابعة (المنقولة) مع منظومة الإسناد الأول.

– $T_X(L_1)$: تمثل الازاحة مسافة l_1 فى اتجاه محور X وذلك لنقل منظومة الإسناد الرابعة إلى المفصل الأول.

– $R_Z(q_1)$: مصفوفة الدوران زاوية مقدارها q_1 حول محور Z حتى تتوازى منظومة الإسناد الرابع (المنقولة) مع منظومة الإسناد المرجعى رقم صفر (قاعدة الروبوت).

ولتبسيط حل مشكلة الكينماتيكا الأمامية.. يتم استخدام طريقة منهجية عامة تسمى لوغاريتم «دنافت–هارتنبرج» Denavit-Hartenberg Algorithm..يمكن تلخيصها فى الخطوات التالية:

١– ترقيم وصلات الذراع الروبوتى من صفر إلى N ابتداءً من قاعدة الروبوت الثابتة.

٢– ترقيم المفاصل من 1 الى N.

٣– تحديد محاور حركة المفصل (دوران أو انزلاق) حسب نوع المفصل. توجد ست أنواع من المفاصل توفر درجات حرية حركة مختلفة كما هو مبين بالشكل رقم (٥). يعتبر المفصل الدورانى Revolute Join أكثر الأنواع استخدامًا فى الروبوتات الصناعية.

٤– يتم وضع المحور Z_i فى اتجاه محور الحركة للمفصل i.

٥– يتم وضع منظومة إسناد كارتيزية مرجعية عند قاعدة الروبوت الثابتة ويراعى أن يتم تحديد اتجاه المحورين X_0 و Y_0 بحيث يكون اتجاه المحور Z_0 فى اتجاه حاصل الضرب الاتجاهى بين X_0 و Y_0.. أو باستخدام قاعدة اليد اليمنى بحيث يشير الإبهام إلى اتجاه محور Z_0 والسبابة إلى محور X_0 والوسطى الى اتجاه Y_0.

٦– يتم وضع منظومات إسناد من 1 إلى N-1 لكل مفصل من مفاصل الذراع بحيث تكون نقطة الاصل S_i فى منظومة الإسناد i هى نقطة تقاطع Z_i مع الخط العمودى المشترك بين Z_{i-1} و Z_i. فى حالة كون Z_{i-1} و Z_i متوازيين يتم وضع S_i عند المفصل i+1.

٧– يتم وضع المحور X_i فى اتجاه الخط العمودى المشترك بين Z_{i-1} و Z_i.

٨– يوضع المحور Y_i بحيث يشكل مع X_i و Z_i منظومة إسناد كارتيزية كما هو موضح بالخطوة رقم (٥).

٩– توضع منظومة الإسناد S_n فى نقطة مركز الأداة (TCP).

١٠– يتم حساب المعامل q_i لكل مفصل.. وهو الزاوية الواجب دورانها حول المحور Z_{i-1} لكى يتوازى المحور X_{i-1} مع X_i .

١١– حساب المعامل d_i لكل مفصل ويمثل الإزاحة الواجب أدائها بطول محور Z_{i-1} حتى يتطابق المحور X_{i-1} مع X_i .

١٢– حساب المعامل ai لكل مفصل ويمثل الإزاحة بطول محور Xi لتتطابق نقطتا الأصل لمنظومتى الإسناد S_i و S_{i-1}

١٣– حساب المعامل a_i لكل مفصل ويمثل الزاوية الواجب دورانها حول المحور X_i حتى تتطابق منظومتا الإسناد S_i و S_{i-1}.

١٤– باستخدام هذه المعاملات.. يمكن الحصول على العلاقة بين أى منظومة إسناد والتى تسبقها.. أى إحداثيات منظومة الاسناد i بالنسبة لـ i-1 و هو ما يعرف باسم مصفوفة التحويل الجزئية والتى تأخذ الصورة المبينة فى المعادلة رقم (٣) – شكل رقم (٣).

جدول رقم (١)
معامل «دنافت – هارتنبرج»

Joint	θ_i	a_i	d_i	α
1	q_1	11	0	90^o
2	q_2	0	0	-90^o
3	0	q_3	0	0

(٦، ٧)

يلاحظ استخدام C و S بدلا من Cos و Sin.. للتبسيط.

وللحصول على العلاقة بين منظومة إسناد النهاية الطرفية S_n وقاعدة الروبوت S_0.. يتم استخدام مصفوفة التحويل الكلية كما فى المعادلة رقم (٤) – شكل رقم (٣). يوضح الشكل رقم (٦) مثالاً لذراع روبوتى قطبى بثلاث درجات حرية حركة. وبتطبيق خطوات اللوغارتم.. يمكن الحصول على معاملات «دنافت–هارتنبرج» المبينة بالجدول رقم (١).

باستخدام هذه المعاملات.. يمكن الحصول على مصفوفات التحويل الجزئية.. وبالتالى مصفوفة التحويل الكلية. تعطى هذه المصفوفة العلاقة بين نقطة مركز الأداة المثبت فى النهاية الطرفية للذراع الروبوتى وقاعدة

(٨)

(٩)

الروبوت الثابتة.. بدلالة مواضع المفاصل الزاوية أو الخطية حسب نوع المفصل (q_1,q_2,q_3) وبمعلومية اطوال وصلات الذراع (L_1).

الكينماتيكا العكسية
Inverse Kinematics

تتلخص مشكلة «الكينماتيكا العكسية».. فى كيفية الحصول على مواضع مفاصل الذراع الروبوتى.. بدلالة إحداثيات نقطة النهاية الطرفية (TCP) بالنسبة لمنظومة إسناد مرجعية.. وبمعلومية أطوال الوصلات كما هو مبين بالشكل رقم (٢). يلاحظ.. إمكانية وجود اكثر من حل.. بمعنى إمكانية ضبط مواضع المفاصل بقيم مختلفة للوصول إلى نفس النقطة. وفى بعض الاحيان.. لا يمكن إيجاد حل لهذه المشكلة فى حالة ما إذا كانت النقطة المراد الوصول إليها خارج نطاق عمل الروبوت Work Envelope – انظر العدد (٨٤). وكما هو الحال فى مشكلة الكينماتيكا الأمامية.. يمكن الحصول على العلاقة بين مواضع المفاصل بدلالة إحداثيات النقطة المراد الوصول إليها أو نقطة مركز الاداة بطريقة هندسية أو باستخدام جبر المصفوفات. يوضح الشكل رقم (٧) ذراعًا بدرجتي حرية حركة (دورانية وانزلاقية). باستخدام هندسة الشكل يمكن بسهولة.. إيجاد قيمة زاوية الدوران q_1 و المسافة q_2 وذلك بدلالة إحداثيات النهاية الطرفية (x,y) وبمعلومية طول الوصلة l_1 فى هذه الحالة.. يلاحظ إمكانية الحصول على أكثر من حل بسبب اعتماد q_1 على q_2 والتى يمكن أن تأخذ قيم موجبة أو سالبة.

تزداد صعوبة إيجاد الحل.. بزيادة عدد درجات حرية حركة الذراع. لذا.. يتم الاعتماد على جبر المصفوفات لحل هذه المشكلة. فى هذه الطريقة.. يتم البدء بالتعامل مع المشكلة كمشكلة كينماتيكا أمامية.. وبعد إيجاد العلاقة بين إحداثيات نقطة النهاية الطرفية بدلالة مواضع المفاصل يتم استخدام جبر المصفوفات.. لإيجاد العلاقة العكسية.. أي مواضع المفاصل.. بدلالة موضع واتجاه النقطة. فى حالة الذراع القطبى الموضح بالشكل رقم (٦).. يتم حل الكينماتيكا الامامية باستخدام لوغارتم «دنافت–هارتنبرج» كما ذكرنا سالفًا. وباستخدام مقلوب المصفوفات.. يمكن ايجاد العلاقة العكسية.

يتم استخدام النموذج الكينماتيكى فى منظومة التحكم الموضعى فى الذراع مع تبسيطه فى حالة عدم تمتع الذراع بقدرة حاسوبية عالية.. وذلك حتى يمكن تنفيذ لوغارتم التحكم فى زمن التشغيل الحقيقى.. وبالتالى ضمان اعتمادية منظومة التحكم.. حيث يمكن أن يؤدى أي خلل فى هذه المنظومة إلى إحداث تلف فى الذراع أو الأغراض التى يتعامل معها الروبوت.. وفى بعض الاحيان إصابة العامل البشرى. لذا.. يتم التضحية بعض الشيء بالدقة لضمان الاعتمادية. وتقاس دقة الذراع بثلاثة معاملات كما هو مبين بالشكل رقم (٨) : درجة الاتقان Accuracy – درجة التكرارية Repeatability – درجة الوضوح Resolution. تعرف درجة الاتقان.. بأنها الفرق بين الموضع الحالى لنقطة مركز الأداة بعد توقف الذراع عن الحركة و الموضع المراد الوصول إليه. بينما تمثل درجة التكرارية نصف قطر الدائرة التى تحتوى على المواضع التى تم الوصول إليها بعد تكرار حركة الذراع عدة مرات للوصول إلى نفس النقطة وفى نفس ظروف التشغيل من حمل ودرجة حرارة.. إلخ. وتحدد درجة الوضوح.. أقل مسافة يمكن أن تتحركها نقطة مركز الأداة.

الكينماتيكا التفاضلية
Differential Kinematics

تختص «الكينماتيكا التفاضلية».. بالحصول على السرعة عن طريق إجراء عمليات تفاضل على المعادلات التى تم الحصول عليها من حل الكينماتيكا الأمامية أو العكسية كما هو واضح من التسمية. وكما هو مبين بالشكل رقم (٩).. تنقسم «الكينماتيكا التفاضلية» إلى قسمين.. يختص القسم الأول والمسمى Forward Jacobian أو اليعقوبية الأمامية.. بالحصول على سرعة نقطة مركز الأداة بدلالة سرعات مفاصل الذراع.. وذلك بإجراء عمليات تفاضل فى معادلات الكينماتيكا الأمامية. بينما يختص القسم الثانى والمسمى Inverse Jacobian أو اليعقوبية العكسية.. بإيجاد العلاقة العكسية.. أى سرعات المفاصل بدلالة سرعة نقطة مركز الأداة.. وذلك بإجراء عمليات تفاضل فى معادلات الكينماتيكا العكسية.

وفى حالة الروبوت «سكارا» SCA-RA – راجع العدد (٨٥) – الموضح الشكل رقم (١٠).. تمثل الثلاث معادلات رقم (٥) بالشكل رقم (٣) حلاً لمشكلة الكينماتيكا الامامية.. حيث C12 تعنى $Cos(q_1+q_2)$ وذلك للتبسيط. بإجراء عملية تفاضل على هذه المعادلات.. يمكن الحصول على المعادلات رقم (٦) التي تمثل متجه سرعة نقطة مركز الأداة (x, y, z) بدلالة سرعات مفاصل الذراع (q_1, q_2, q_3). ويمكن إيجاد العلاقة العكسية.. أى سرعات المفاصل بدلالة سرعة نقطة مركز الأداة باستخدام مقلوب المصفوفة اليعقوبية.

تستخدم الكينماتيكا التفاضلية أيضاً لتحديد ما يعرف بالتشكيلات المفردة Singular Configurations.. وتمثل السرعات التى يمكن أن تشكل خطورة على الذراع والتى يجب تجنبها فى برنامج التحكم. تعرف هذه السرعات على أنها السرعات التى تجعل محدد المصفوفة اليعقوبية (Ja-cobian) يساوى صفر. فى المثال السابق.. يمكن حساب محدد هذه المصفوفة اليعقوبية كما فى المعادلة رقم (٧) –شكل رقم (٣). بمساواة هذا المحدد بالصفر.. نحصل على

المعادلة رقم (٨). يمكن ملاحظة أن السرعات التى تجعل هذه العلاقة صحيحة.. هى عندما تكون سرعة المفصل الثانى (q_2) تساوى صفر أو π كما هو موضح بالشكل رقم (١١).

فى هذا الشكل.. يلاحظ التغير المفاجىء فى سرعة الذراع عند $q_2=0$ أو $q_2=\pi$ وهو ما يمكن أن يسبب خطورة على الذراع. لذا.. يجب تجنب هذه القيم فى برنامج التحكم.

تقنيات التحكم

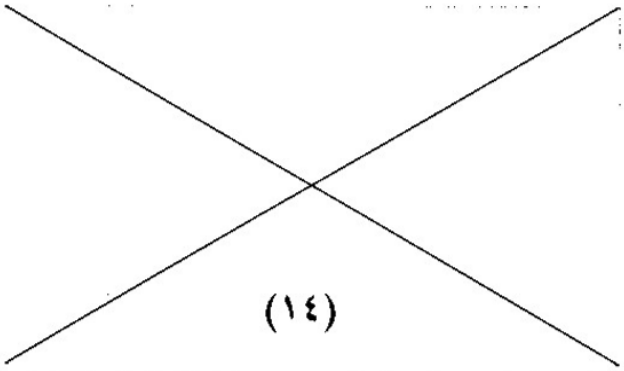
- التحكم مفتوح الحلقة Open-Loop:

فى الفراغ الكارتيزى.. يتم استخدام النموذج الكينماتيكى للذراع لحساب مواضع الوصلات المناسبة للوصول بالنهاية الطرفية إلى موضع معين. وكما هو مبين بالشكل رقم (١٢).. لا يتم توفير معلومات عن مواضع الوصلات إلى منظومة التحكم.. وبالتالى تعتمد دقة منظومة التحكم بشكل أساسى على دقة النموذج الكينماتيكى بفرض عدم وجود إضطرابات Disturbances فى الذراع او فى بيئة العمل.

تعتبر منظومات التحكم مفتوح الحلقة من ابسط وارخص منظومات التحكم والاكفأ من حيث الاعتمادية. وعادة ما يتم استخدام هذا النوع فى التحكم ذو الموضعين Two-Position Control.. حيث يوجد موضعان على كل محور حركى يحددان بداية ونهاية الحركة كما هو الحال فى معظم الاذرع الهوائية والهيدروليكية. لذا.. نجد أنه عادة ما يطلق على منظومة التحكم مفتوحة الحلقة اسم منظومات التحكم من توقف إلى توقف Stop-to-Stop أو منظومات الالتقاط والوضع Pick-and-Place. يكثر استخدام منظومات التحكم مفتوحة الحلقة فى روبوتات الشحن والتفريغ ومناولة المواد. تسبب التغيرات الميكانيكية والاهتزازات فى بيئة عمل الذراع حدوث أخطاء لايمكن لمنظومة التحكم اكتشافها أو تصحيحها.. لذا لا يمكن استخدام منظومات التحكم مفتوح الحلقة لأداء عمليات تصنيع معقدة.

- التحكم مغلق الحلقة Closed-Loop أو تحكم المؤازرة Servo:

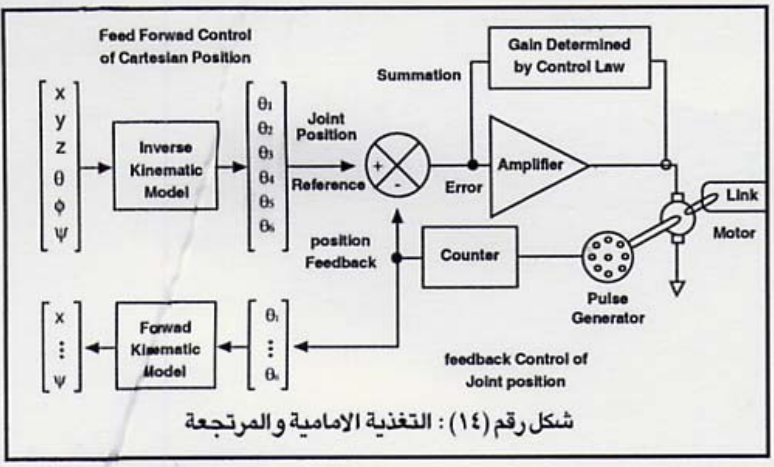
يقصد بالمؤازرة Servo وجود منظومة للتحكم يمكنها اختزان واسترجاع المعلومات الخاصة بتحديد حركة الذراع. فى منظومات التحكم مغلقة الحلقة أو تحكم المؤازرة.. يتم



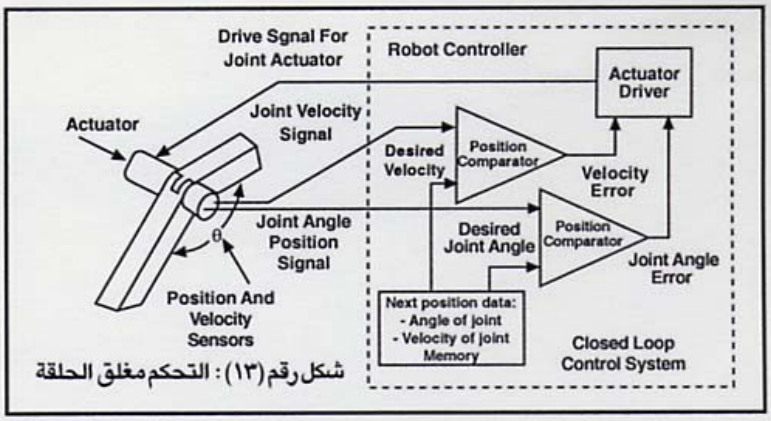
توفير معلومات بصورة مستمرة عن موضع وصلات الذراع باستخدام مستشعرات موضع زاوى او خطى - أنظر العدد رقم (٧٣) - كما هو مبين بالشكل رقم (١٣).

تساعد هذه المعلومات منظومة التحكم على تحديد الفعل المناسب الواجب القيام به لتقليل الفرق بين الموضع الحالى والموضع المطلوب. فى التحكم مغلق الحلقة. عادة ما يتم استخدام تغذية امامية Feedforward Control بالاضافة إلى تغذية عكسية أو مرتجعة Feedback Control لتمكين الروبوت من القيام باداء كثير من عمليات التصنيع المعقدة كما هو موضح بالشكل رقم (١٤).

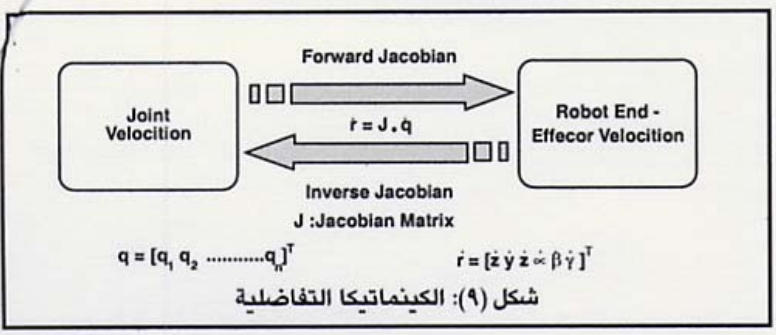
يتم استخدام هذا النوع من منظومات التحكم فى الأذرع التى تتطلب تحكم كونتورى او متابعة خطية.. مثل روبوتات الطلاء واللحام والتجميع. يعيب منظومة التحكم مغلق الحلقة.. ارتفاع تكلفة المنظومة بالاضافة إلى ضرورة توفير فريق صيانة على درجة عالية من المهارة. فى المقال التالى سوف يتم بمشيئة الله عرض طرق التحكم الحركى فى الأذرع الروبوتية مثل التحكم من نقطة الى نقطة والتحكم الكونتورى.



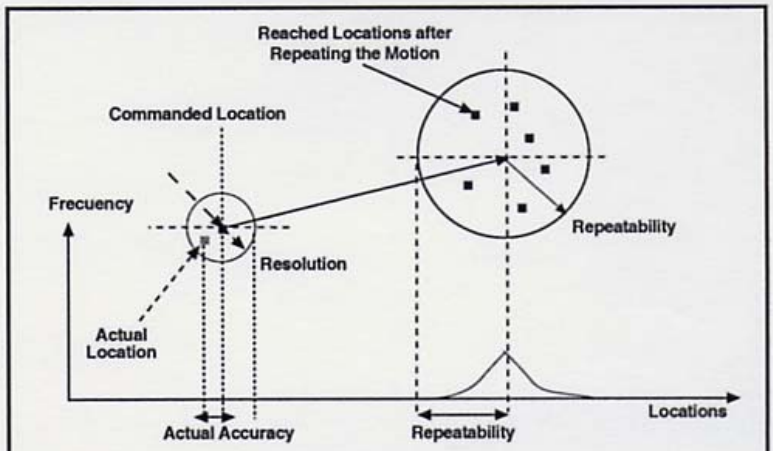
شكل رقم (١٤) : التغذية الامامية والمرتجعة



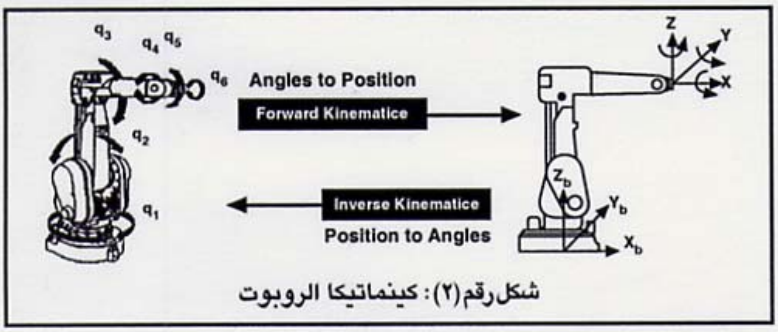
شكل رقم (١٣) : التحكم مغلق الحلقة



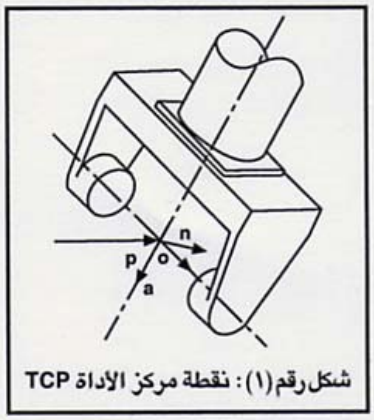
شكل (٩): الكينماتيكا التفاضلية



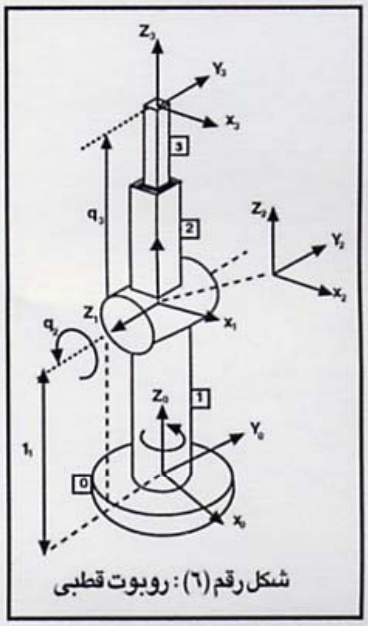
شكل رقم (٨) : معاملات الدقة



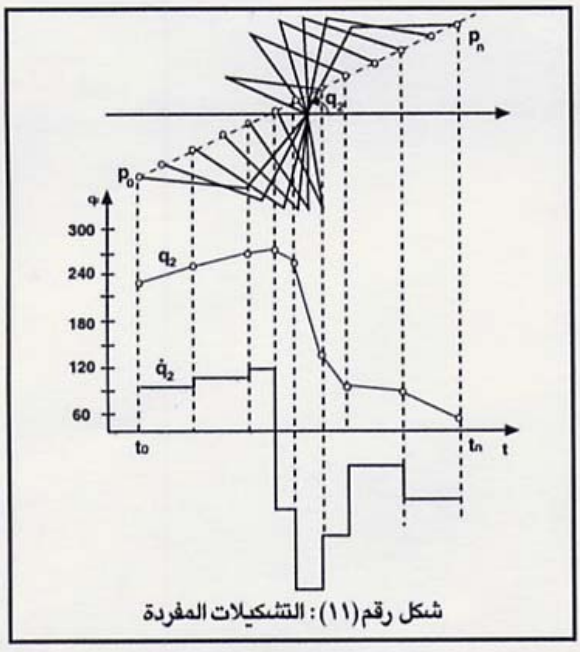
شكل رقم (٢) : كينماتيكا الروبوت



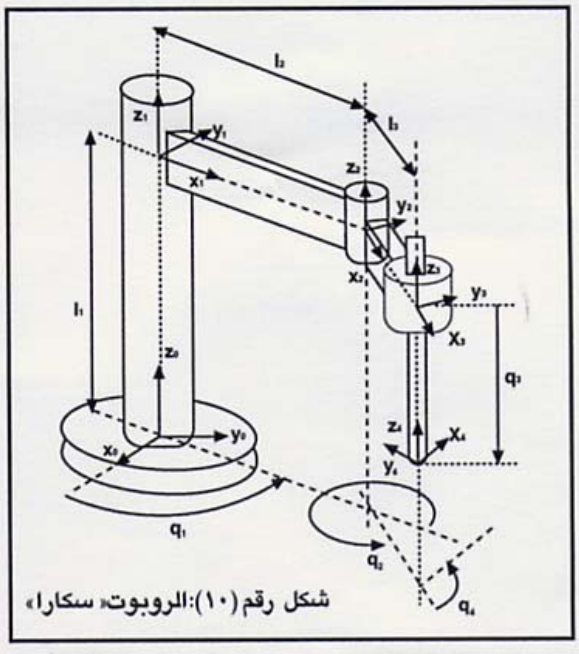
شكل رقم (١) : نقطة مركز الأداة TCP



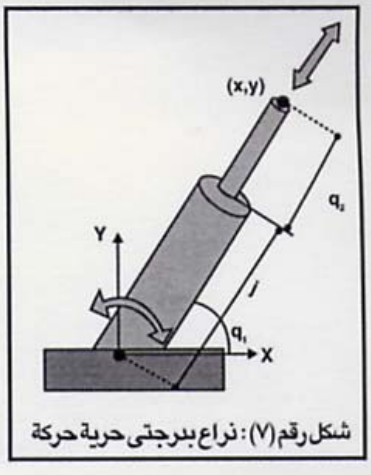
شكل رقم (٦) : روبوت قطبى



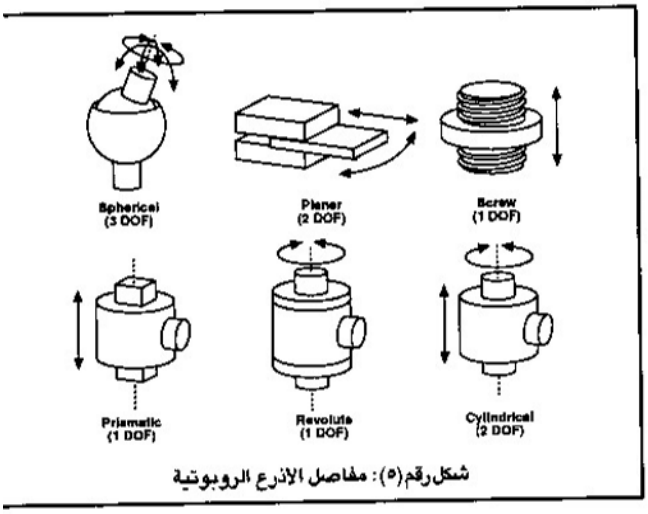
شكل رقم (١١) : التشكيلات المفردة



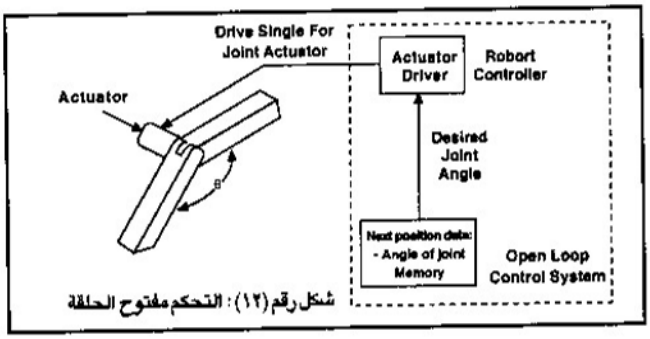
شكل رقم (١٠):الروبوت« سكارا»



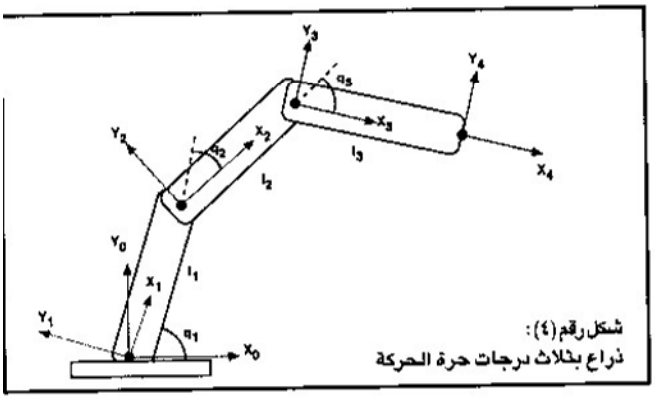
شكل رقم (٧) : نراع بدرجتى حرية حركة



شكل رقم (٥): مفاصل الاذرع الروبوتية



شكل رقم (١٢): التحكم مفتوح الحلقة



شكل رقم (٤):
ذراع بثلاث درجات حرة الحركة

$$H = \begin{bmatrix} \text{Rotation [3x3]} & \text{Translation [3x1]} \\ \text{Perspective [1x3]} & \text{Scale[1x1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotation} & \text{Translation} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$H = R_z(q_1).T_z(L_1).R_z(q_2).T_x(L_2).R_{z,q}(q_3).T_x(L_3) \quad \cdots\cdots (2)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$H = {}^0A_n = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdots {}^{(n-1)}A_n \quad \cdots\cdots (4)$$

$$x = l_3 C_{12} + l_2 C_1$$
$$y = l_3 S_{12} + l_2 S_1 \quad \cdots\cdots (5)$$
$$z = l_1 - q_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_3 S_{12} + l_2 S_1) & -l_3 S_{12} & 0 \\ l_3 C_{12} + l_2 C_1 & l_3 C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$|J| = -[l_3 C_{12}(l_3 S_{12} + l_2 S_1) + l_3 S_{12}(l_3 C_{12} + l_2 C_1)] \quad \cdots\cdots (7)$$

$$l_3 C_{12}(l_3 S_{12} + l_2 S_1) = l_3 S_{12}(l_3 C_{12} + l_2 C_1) \quad \cdots\cdots (8)$$

شكل رقم (٣)